Übungsstunde 4:

Sarah Faria hochladen
Polybox bot oder
alles freigeben
Baris Esser hochladen

Plan:

- Vektorräume (VR)
- Untervektorräume (UVR / Unterraum)
- Linearkombination
- Lineare Unabhängigkeit
- Erzeugendensystem
- Basis, Dimension

Vektorräume:

(i) $\forall u,w \in V$: $\quad u+w = w+u$

(ii) $\forall u,v,w \in V$: $\quad (u+v)+w = u+(v+w)$

(iii) $\exists 0 \in V$ s.d. $\forall u \in V$: $\quad u+0 = u$

(iv) $\forall u \in V\ \exists -u \in V$ s.d.: $\quad u+(-u) = 0$

(v) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha\cdot\beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$

(vi) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha+\beta)\cdot u = \alpha u + \beta u$

(vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u,w \in V$: $\quad \alpha(u+w) = \alpha u + \alpha w$

(viii) $\forall u \in V$: $\quad \mathbb{1}\cdot u = u$ $\qquad \mathbb{1}$ ein skalar!

Beispiele:
- $\mathbb{R}^n = \left\{ \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \text{mit } x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathbb{R}^{m\times n}$

Untervektorraum:

$U \subseteq V \qquad U \neq \{\emptyset\}$

(i) $\forall a,b \in U$ $\quad a+b \in U$

(ii) $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha\cdot a \in U$

Frage: $U = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 \geq 0 \right\}$

$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad$ (i) $\quad u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin U$

Linearkombinationen:

Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ dann:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

eine Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Beispiel:
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boxed{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lineare Unabhängigkeit:

V ein Vektorraum. $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig, falls das LGS:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i v_i = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Beispiele:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

Erzeugendensystem:

Kann man jeden Vektor v eines Vektorraumes V als lineare Kombination von $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ darstellen, also

$$V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dann nennt man diese Vektoren Erzeugendensystem von V. V heisst dann endlich dimensional.

Beispiel:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$ ES von $\mathbb{R}^3$

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \rightarrow \text{ja, ES}$$

Frage: $p_1(x) = x^3 + x^2$ $\quad \mathcal{P}_4$ erzeugbar

$p_2(x) = x^2 - 2x - 4$

$p_3(x) = 3x + 4$ $\quad$ Polyn. Grad ≤ 4 $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$

$p_4(x) = 2x + 3$ $\quad \leadsto$ nein

$p_5(x) = x^3 + 2$

$1, x, x^2, x^3, x^4$

Basis:

Besteht aus der minimalen Anz. lin. unabh. Vektoren, welche V aufspannen.

Bsp.: $\mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 3 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -17 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 3 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -17 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{38} & 88 & -5 \end{matrix}$$

Basis: $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$

Übungsstunde 4:

Programm heute:

- Vektorräume (VR)
- Untervektorräume (Unterraum / UVR)
- Linearkombination
- Lineare Unabhängigkeit
- Erzeugendensystem
- Basis / Dimension

3.4.6) Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $m \times n$-Matrix, $m > n$, $A^T A = I_n$

(Serie 3)

(i) $\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\| = \|\underline{x}\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ($\underline{\underline{A}}$ ist orth.)

(ii) $\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$

(iii) $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ orth., $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ auch orth.

(i) $A^T = A^{-1}$ $\rightarrow$ kann nicht sein, da $m > n$

(ii) $\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{\underline{A}}\,\underline{x})^T (\underline{\underline{A}}\,\underline{x})} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x}} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{I}_n \underline{x}} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}}$

$= \|\underline{x}\|$

(iii)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ obere Dreiecksmatrix, gib ne $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$-Zerl. an:

$\underline{\underline{A}}$ orth., gib $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$-Zerl. $\rightarrow$ $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$

Vektorräume: Vektorraum V

(i) $\forall u, w \in V$ $\quad u + w = w + u$

(ii) $\forall u, v, w \in V$ $\quad (u+v)+w = u+(v+w)$

(iii) $\exists 0 \in V$ s.d. $\forall u \in V$: $\quad u + 0 = u$ $\quad$ eg. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\forall u \in V \; \exists -u \in V$: $\quad u + (-u) = 0$

(v) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha (\beta \cdot u)$

(vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$

(vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, w \in V$: $\quad \alpha (u + w) = \alpha u + \alpha w$

(viii) $\forall u \in V$: $\quad \mathbb{1} \cdot u = u$

Beispiel: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{P}^n$ $\qquad V = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \}$

UVR:

(i) $\forall u, w \in U$: $\quad u + w \in U$

(ii) $\forall u \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha \cdot u \in U$

Frage: $U = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \cdot x_2 \geq 0 \right\}$ $\qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} ⚡, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin U$$

Linearkombination: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

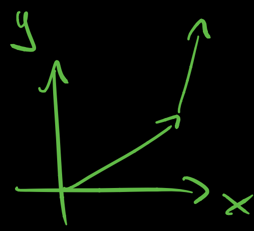
$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$

Beispiel: $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boxed{7} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lineare Unabhängigkeit:

Sei V ein Vektorraum. Dann heissen die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig, falls das LGS:



$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

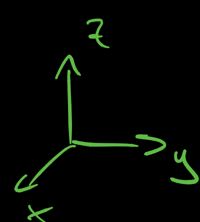
Frage: Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ linear abhängig!

Beispiel: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Erzeugendensystem:



Kann man <u>jeden</u> Vektor $v \in V$ als lin. Komb. von $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ darstellen

$$\Rightarrow V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

span := aufgespannt von

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$ ein ES & V ist endlich dimensional.

Bsp.: $\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Basis:

Falls V n-dimensional ($\dim(V) = n$) gilt:

(i) Mehr als n-Vektoren sind lin. abh.

(ii) Weniger als n-Vektoren sind sicher nicht erzeugend.

$$\mathbb{R}^3: \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Genau n-Vektoren sind genau dann linear unabh. falls sie erzeugend sind. Sie bilden dann eine Basis.

$$\mathbb{R}^3: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$$

Bsp.: $\mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -17 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 3 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -17 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{38} & 88 & -5 \end{matrix}$$

Dimension:

Bsp: $\mathcal{P}_4$, $1, x, x^2, x^3, x^4$ $\Rightarrow \dim(\mathcal{P}_4) = 5$